В. В. Шурыгин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

vadimjr@ksu.ru

О ЗАДАЧЕ КОНТАКТНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Хорошо известно, что любые два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка вида

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

эквивалентны относительно группы контактных преобразований пространства $\mathbb{R}^3(x, y, p)$, где $p = y'$. А. Трессе [1] нашел полный набор относительных дифференциальных инвариантов уравнений (1) относительно действия группы точечных преобразований пространства $\mathbb{R}^2(x, y)$. В работе [2] полностью перечислены абсолютные дифференциальные инварианты и решена проблема эквивалентности двух таких уравнений относительно действия группы точечных преобразований. В настоящей работе мы решаем задачу эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, квадратичных по второй производной,

$$(y'' - \lambda_1(x, y, y'))(y'' - \lambda_2(x, y, y')) = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \tag{2}$$

относительно группы контактных преобразований пространства $\mathbb{R}^3(x, y, p)$.

Геометрически каждое из уравнений $y'' = \lambda_i(x, y, y')$ задает одномерное распределение $\mathcal{F}_i$ в трехмерном контактном многообразии $\mathbb{R}^3(x, y, p) = J^1\mathbb{R}^2(x, y)$. Это распределение лежит в распределении Картана и задается векторным полем

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + \lambda_i(x, y, p)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Выберем два независимых интеграла a и b поля X_1 и два независимых интеграла f и g поля X_2; пусть $g = h(a, b, f)$. Введем новые локальные координаты a, b, $c = -h_a/h_b$. В этих координатах поля X_1 и X_2 с точностью до множителя примут вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial c} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial a} + c\frac{\partial}{\partial b} + G_2(a, b, c)\frac{\partial}{\partial c}$$

соответственно. Назовем дифференциальное уравнение

$$y'' = G_2(x, y, y'),$$

определяемое полем X_2, *ассоциированным* с уравнением (2). Если же в этой конструкции поменять X_1 и X_2 местами, то придем к другому уравнению $y'' = G_1(x, y, y')$, ассоциированному с исходным уравнением (2). Будем говорить, что эти два уравнения *дуальны* друг другу.

Теорема. *Два уравнения* (2) *контактно эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнение, ассоциированное с одним из них, точечно эквивалентно хотя бы одному из двух дуальных уравнений, ассоциированных с другим из них.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Tresse A. *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* // Acta Math. – 1894. – V. 18. – P. 1–88.

2. Kruglikov B. *Point classification of 2nd order ODEs: Tresse classification revisited and beyond.* // arXiv:0809.4653. – 2008.